O WYŻSZOŚCI "LOI SUPRÊME" HOENE-WROŃSKIEGO NAD WZOREM BÜRMANNA-LAGRANGE'A

TOMASZ MASZCZYK

W całości projektu filozoficznego Józefa Hoene-Wrońskiego matematyka odgrywa dwojaką rolę. Z jednej strony, jest fundamentem wiedzy i warunkiem wszelkiego poznania. Z drugiej strony, jest dziedziną, do której w pierwszej kolejności należy zastosować zasady nowej filozofii, dając jej metafizyczną podstawę [36]. W pierwszej roli, jako metoda poznania i wykorzystania zasad nauk przyrodniczych matematyka doprowadziła Wrońskiego do wielu wizjonerskich i wyprzedzających jego czasy wynalazków. Oceniając z tej perspektywy, Wrońskiego śmiało można zaliczyć do heroicznych pionierów „wieku rozumu", antycypujących tryumf nowej cywilizacji przemysłowej. Niestety, traktowanie matematyki jako pola do metafizycznych spekulacji, w sposób całkowicie anachroniczny, kierowało się przeciwnie do coraz bardziej dominującego nurtu zmierzającego do oparcia matematyki na podstawach ścisłych, przy jednocześnie wzrastającej świadomości jej autonomiczności wobec filozofii. Pomni kryzysu, w jaki wtrąciła ówczesną matematykę dyskusja o filozoficznych podstawach „rachunku nieskończenie małych", matematycy ówcześni z niechęcią odwracali się od „metafizyki" w stronę konstruktywnej refleksji nad strukturami pojawiającymi się w procesie rozwiązywania konkretnych problemów. W 1772 r. Lagrange pisze: „Takie rozumienie Rachunku Różniczkowego i Całkowego wydaje mi się prostsze i jaśniejsze, niż przyjmowane dotychczas. Nie zależy ono, jak widzicie, od żadnej metafizyki i żadnej teorii wielkości nieskończenie małych albo znikających" [25], str. 443.

Wielkim paradoksem w myśli Wrońskiego był fakt, że pod pozorem owej „metafizyki" skrywała się w istocie metodologia o charakterze operacyjnym, zmierzająca do stworzenia algorytmów skutecznego rozwiązywania konkretnych problemów [17], [19]. Dążenie Wrońskiego do zrozumienia zakresu stosowalności owych algorytmów nie mogło być ukoronowane stworzeniem ścisłej teorii, gdyż wymagało to pojęć i metod matematyce ówczesnej niedostępnych. Jak bardzo intuicja Wrońskiego wyprzedzała matematykę ówczesną świadczy fakt, że jego idea „szeregu uniwersalnego" znalazła ścisłe uzasadnienie dopiero w pracy Stefana Banacha z roku 1939. [2]. Niestety, nie mogąc dać swoim odkryciom, unifikującym wiele znanych dotąd algorytmów i dostarczającym nowych, solidnej podstawy matematycznej, Wroński wypuszcza się w rejony natchnionej spekulacji, najwyraźniej przekonany o ich uniwersalności [17], [19], [36].

Jednak w dziedzinie funkcji analitycznych formuły Wrońskiego dają jawne wyrażenia na współczynniki szeregów będących rozwiązaniem wielu ważnych zagadnień. W niniejszym artykule porównujemy, na przykład, rozwiązanie zagadnienia kompozycji $F \circ f^{-1}$ dla zadanych funkcji analitycznych F i f, podane przez Lagrange'a w roku 1770 [23] oraz rozwiązanie tego zagadnienia podane przez Wrońskiego w roku 1812 (zaprezentowane w trochę zagmatwany sposób, dla osiągnięcia pozornie większej ogólności w [18] oraz w [19]). Kontrowersja wokół wzajemnej relacji między tymi dwoma rozwiązaniami skończyła się nieszczęśliwie dla Wrońskiego. Z początku rezultaty Wrońskiego zostały przychylnie zrecenzowane przez Lagrange'a i Lacroix. Jednak nie wydaje się, żeby po śmierci Lagrange'a w roku 1813, inni matematycy Akademii Francuskiej zgadzali się z tym, że rozwiązanie Wrońskiego przewyższa rozwiązanie Lagrange'a. Sam Wroński nie potrafił ich przekonać do swoich idei, zrażając ich do siebie pełną emocji i „metafizyki" polemiką z rezultatami Lagrange'a [18], Laplace'a [20] i Poissona [18]. W wyniku wywołanego tym skandalu Wroński stracił posadę w obserwatorium astronomicznym w Marsylii, co zepchnęło go w izolację od środowiska matematycznego i skazało jego dorobek naukowy na długotrwałe zapomnienie. Od tego momentu prace przedkładane przez Wrońskiego były przez Akademię Francuską ignorowane, lub zbywane lekceważącymi komentarzami.

Celem niniejszego artykułu jest przystępna prezentacja tych zagadnień oraz wykazanie, że w owym sporze rację miał właśnie Wroński. Podczas gdy formuła (Bürmanna -) Lagrange'a jest w istocie rekurencyjnym algorytmem, formuła Wrońskiego jest rozwiązaniem tej rekurencji (modulo rozwiązanie rekurencji definiującej pewien ciąg liczb naturalnych, które zawdzięczamy dopiero Faà di Bruno). W zasadzie, sedno sporu leżało w różnym rozumieniu pojęcia „rozwiązania". Lagrange uważał, że rozwiązał problem, bo podał algorytm zawierający przejścia graniczne, Wroński uważał, że prawdziwym rozwiązaniem jest formuła algebraiczna. Wbrew sugestywnie, acz myląco, prostej formule analitycznej, bez formuły Faà di Bruno albo wzorów Wrońskiego na dzielenie szeregów potęgowych, formuła Bürmanna-Lagrange'a dostarcza jedynie rekurencyjnego algorytmu o złożoności porównywalnej (dla ogólnych danych) z odwracaniem *par force* szeregu metodą współczynników nieoznaczonych. Zadziwiające, że tak wnikliwy badacz dzieła Wrońskiego jak Samuel Dickstein w [12] poprzestaje na stwierdzeniu teoretycznej równoważności tych rozwiązań sprowadzając oba do rozwinięcia Taylora względem zamienionej zmiennej. Ten sam punkt widzenia przyjęty jest również w innych pracach na ten temat [9][44][35]. Praca [43], co prawda, wykazuje nieznaczną (i pozorną) przewagę rozwiązania Wrońskiego nad formułą Bürmanna-Lagrange'a, ale nie dotyka zasadniczej różnicy jakościowej pod względem efektywności. Nawet po sprowadzeniu obu wzorów za pomocą formuły Faà di Bruno (nieznanej jeszcze Lagrange'owi, Bürmannowi i Wrońskiemu) do możliwie najprostszej postaci algebraicznej, widać we wzorze Bürmanna-Lagrange'a zbędne komplikacje, które przy obliczaniu poszczególnych współczynników się upraszczają, podczas gdy we wzorze Wrońskiego wcale się nie pojawiają. Można powiedzieć, że formuła Wrońskiego jest formułą „z Księgi" ukrytą w szatach Kopciuszka, podczas gdy formuła Bürmanna-Lagrange'a jest jej trochę starszą, brzydszą, ale śmielszą siostrą. Dla wyrobienia sobie zdania w tej kwestii, zachęcamy czytelnika do obliczenia piątego współczynnika rozwinięcia z uproszczonego wzoru Bürmanna-Lagrange'a (24) i porównania tego z uproszczonym wzorem Wrońskiego (35).

Pewnym wytłumaczeniem dla wciąż trwającego historycznego nieporozumienia w tej sprawie jest fakt, że szereg Wrońskiego, do pracy Banacha [2] na ten temat, miał status rozwiązania wyłącznie formalnego. W międzyczasie wielu matematyków, jak Lambert [27], Euler [14], Lexell [32], Laplace [28, 29, 30], Cauchy

[3, 4, 5, 6, 7, 8], Jacobi [22], Czebyszew [11], Zołotariew [42], Niekrasow [34], Sochocki [38], Stiltjes [39] i wielu innych, publikowało prace na temat szeregu Lagrange’a. Dzięki temu rozwiązanie Lagrange’a zyskało olbrzymi *impact factor*, któremu trudno przeciwstawić prace autorów polskich jak Dickstein [12, 13], Żorawski [43], Żurakowski [44] i Banach [2], publikowane w polskich czasopismach, oraz jedną pracę Cayleya [9], omawiające metodę Wrońskiego.

Na przełomie XIX i XX wieku metodę Wrońskiego odwracania szeregu można znaleźć w prawie każdym podręczniku analizy matematycznej, na przykład [33], [31], zanim jeszcze w 1939 roku Banach nadał ścisły sens „Loi Suprême”, na którym metoda ta jest oparta. Niestety, po II-giej wojnie światowej metoda ta zniknęła z większości podręczników, nawet polskich, a w artykułach naukowych odwołania do metody Wrońskiego stały się sporadyczne [37]. Tymczasem metoda Bürmanna-Lagrange’a, która w zastosowaniu do ogólnego przypadku nie dorównuje metodzie Wrońskiego ani prostotą ani elegencją, po dziś dzień cieszy się, nie całkiem zasłużoną, opinią ostatecznego rozwiązania problemu lokalnego odwracania analitycznej zamiany zmiennej [16] (również [1, 15, 41, 10]):

“**Bürmann-Lagrange series**. A power series which offers a complete solution to the problem of local inversion of holomorphic functions.”

Tak kategoryczny sąd *ex cathedra* kształtuje opinię szerszej publiczności, zupełnie nieświadomej istnienia rozwiązania Wrońskiego:

```
>From: edwa...@sunrise.Stanford.EDU (Larry Edwards)
>Date: 7 Nov 91 00:13:58 GMT
>Organization: Stanford University
>Is there any general method for finding the inverse
>of a taylor series?
>That is given some arbitrary taylor series
>(assuming it does have an inverse)
>is there some way of constructing the taylor series
>of its inverse.

(...) What the guy wanted was something like
the Burmann-Lagrange formula.
On page 150|1 of Louis Comtet ‘Advanced Combinatorics’
Reidel 1974
one will find the required formulas.

J.W. Nienhuys,
Research Group Discrete Mathematics
Dept. of Mathematics and Computing Science
Eindhoven University of Technology
P.O. BOX 513, 5600 MB Eindhoven
The Netherlands
```

Nie umniejszy wielkości Lagrange’a to, że uznany zostanie wkład Wrońskiego w rozwiązanie tego problemu. Rozsądne wydaje się dziś stosować oba rezultaty łącznie: obliczamy wspólczynniki rozwinięcia ze wzoru Wrońskiego (35) i wykorzystujemy resztę w postaci Bürmanna-Lagrange'a do oszacowania błędu przybliżenia skończoną sumą jego wyrazów.

1. Szereg uniwersalny - pierwsze wcielenie A.D. 1810

1.1. Faktoriały Krampa. Definicja.

$$F_0(x) := 1, \quad F_n(x) := \varphi(x)\varphi(x+\Delta x)\cdots\varphi(x+(n-1)\Delta x),\ n>0$$

gdzie $\varphi(x)$ - dowolna funkcja taka, że $\varphi(x_0)=0$, Δx - dowolny przyrost zmiennej x.

U Dicksteina [12] faktoriały Krampa generowane przez funkcję $\varphi(x)$ nazywa się *fakultetami funkcji* $\varphi(x)$.

Problem współczynników. Znaleźć współczynniki rozkładu danej funkcji F w szereg funkcyjny

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F_n.$$

1.2. Rozwiązanie problemu współczynników.

Definicja. Operator różnicowy Δ. Dla dowolnej funkcji $F(x)$

$$(\Delta F)(x) := F(x) - F(x-\Delta x).$$

Obserwacja. Dla $m<n$

$$(\Delta^m F_n)(x_0) = 0.$$

Rzeczywiście, ponieważ $\varphi(x_0)=0$, więc

$$F_n(x) = \varphi(x)\varphi(x+\Delta x)\cdots\varphi(x+(n-1)\Delta x)$$

znika w $x = x_0, x_0-\Delta x, \ldots, x_0-(n-1)\Delta x$. Dlatego wszystkie różnice F_n rzędu $<n$ znikają w $x=x_0$.

Stosując operatory Δ^k do rozwinięcia i biorąc wartość w x_0 dostajemy stąd

$$\begin{aligned}
(\Delta F)(x_0) &= c_1(\Delta F_1)(x_0)\\
(\Delta^2 F)(x_0) &= c_1(\Delta^2 F_1)(x_0) + c_2(\Delta^2 F_2)(x_0)\\
&\vdots\\
(\Delta^n F)(x_0) &= c_1(\Delta^n F_1)(x_0) + c_2(\Delta^n F_2)(x_0) + \cdots + c_n(\Delta^n F_n)(x_0).
\end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ dostajemy

$$c_n = \frac{\begin{vmatrix} \Delta F_1 & \cdots & \Delta F_{n-1} & \Delta F\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \Delta^n F_1 & \cdots & \Delta^n F_{n-1} & \Delta^n F\end{vmatrix}}{\Delta F_1\cdots\Delta^{n-1}F_{n-1}\cdot\Delta^n F_n}(x_0) \tag{1}$$

1.3. **Wrońskian.** W granicy $\Delta x \to 0$ operatory różnicowe zastępujemy pochodnymi (przyrost Δx, występujący jako mianownik w ilorazach różnicowych, się skraca). Wówczas ułamek (1) przechodzi w ułamek, którego licznikiem jest **wrońskian**

$$\begin{vmatrix} F_1' & \cdots & F_{n-1}' & F' \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_1^{(n)} & \cdots & F_{n-1}^{(n)} & F^{(n)} \end{vmatrix}.$$

W 1882 T. Muir pisał :

"Wrońskiany były po raz pierwszy użyte przez Wrońskiego (...), zapomniane na 60 lat, ponownie ujrzały świat dzięki badaniom Christoffela i Frobeniusa, którym zawdzięczamy odkrycie ich własności. Upłynęło wiele czasu nim ustalili oni identyczność funkcji Wrońskiego i wyznaczników, którym, jak mi się zdaje, należy nadać imię autora".

Zauważmy jeszcze, że w granicy $\Delta x \to 0$ faktoriały Krampa przechodzą w potęgi funkcji generującej $\varphi(x)$.

2. Zrozumienie ogólności metody - A.D. 1815

W 1815 Wroński zauważa:

„Należy, na koniec, zauważyć, że jeśli (...) Δ zamiast oznaczać różnice (...) oznacza zupełnie inny układ funkcji algorytmicznych (...), to także to, co powiedziane było względem funkcji SZIN, *będzie prawdziwe"*

Oznacza to, że Wroński uważał, że można obliczyć współczynniki c_n rozwinięć nie tylko za pomocą funkcjonałów różnic i pochodnych w punkcie x_0, ale również i dla dowolnych układów funkcji F_n i funkcjonałów liniowych L_m spełniających warunek

$$L_m(F_n) = 0$$

dla $m < n$, które nazywa „funkcjami algorytmicznymi".

W szczególności, dobierając do funkcji

$$F_n(x) = \frac{1}{n!}(x - x_0)(x - x_0 + \Delta x) \cdots (x - x_0 + (n-1)\Delta x), \tag{2}$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n!}(x - x_0)^n, \tag{3}$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n!}(f(x) - y_0)^n \tag{4}$$

funkcjonały, odpowiednio,

$$L_n(F) = \frac{\Delta^n F}{(\Delta x)^n}(x_0), \tag{5}$$

$$L_n(F) = F^{(n)}(x_0), \tag{6}$$

$$L_n(F) = \left[\left(\frac{x - x_0}{f(x) - y_0}\right)^n F^1(x) \right]^{(n-1)}_{x = x_0} \tag{7}$$

otrzymujemy formalnie wzór

$$c_n = L_n(F), \tag{8}$$

będący konsekwencją faktu, że

$$L_m(F_n) = \delta_{m,n}, \tag{9}$$

a więc znane rozwinięcia w szereg, odpowiednio, Newtona, Taylora i Bürmanna-Lagrange'a.

Ogólnego problemu zbieżności takich rozwinięć Wroński nie rozważał. Problem taki postawił i rozwiązał dopiero Stefan Banach w roku 1939 [2]. Jednak Wroński zdawał sobie sprawę z problemów analitycznych związanych ze zbieżnością jego szeregu uniwersalnego. Idea Wrońskiego zaradzenia rozbieżności lub przyspieszenia zbieżności jego szeregu, kiedy zbiega powoli, polega na rozwijaniu w szereg względem faktoriałów Krampa generowanych przez funkcję $\psi(x)$, otrzymaną z $\varphi(x)$ za pomocą prostego przekształcenia analitycznego. W przypadku szeregu Taylora wokół x_0, będącego granicznym (przy $\Delta x \to 0$) rozwinięciem względem faktoriałów Krampa generowanych przez funkcję $\varphi(x) = x - x_0$, Wroński proponował zastosowanie do niej przekształcenia liniowo-wymiernego. Na przykład, przekształcenie

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)+2}$$

zamienia szereg Taylora funkcji $\ln x$ wokół $x_0 = 1$,

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots,$$

zbieżny dla $0 < x \leqslant 2$, w szereg

$$2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right],$$

zbieżny dla wszystkich $x > 0$.

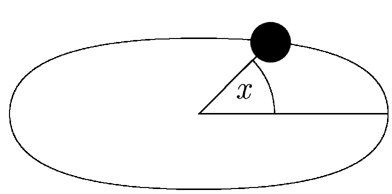
3. Porównanie formuł Bürmanna-Lagrange'a i Wrońskiego.

3.1. **Rozwiązanie Lagrange'a problemu odwrotnej analitycznej zamiany zmiennej.** Problem matematyczny, o którym będzie mowa, motywowany był zagadnieniem astronomicznym, którego rozwiązanie przyniosło Lagrange'owi wielką sławę i zapoczątkowało jego wielkie dzieło przekształcania astronomii i mechaniki newtonowskiej w gałęzie analizy matematycznej [26].

Równanie Keplera

$$t = x - e\sin x$$

opisuje ruch okresowy planety (t = czas, okres = 2π) po orbicie eliptycznej (e = mimośród), gdy położenie planety mierzymy kątem x.



Problem astronomiczny. Znaleźć zależność $x(t)$.

Rozwiązanie Lagrange'a [24]**.**

$$x = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} [\sin^n t]^{(n-1)} e^n$$

Rozwiązanie to otrzymuje Lagrange traktując problem astronomiczny jako przypadek szczególny bardziej ogólnego zagadnienia.

Uogólnione równanie Keplera.

$$t = x - e \cdot g(x).$$

Uogólniony problem astronomiczny. Znaleźć zależność $F(x(t))$ dla zadanej funkcji $F(x)$.

Rozwiązanie Lagrange'a [23]**.**

$$F(x) = F(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[g(t)^n F^{(1)}(t)\right]^{(n-1)} e^n. \tag{10}$$

Matematycznie rzecz biorąc, pod warunkiem, że $g(t) \neq 0$, można ten związek wyrazić w terminach lokalnego odwracania odwzorowania analitycznego $y = f(x)$, przyjmującego w ustalonym punkcie $x = x_0$ wartość y_0 lokalnie jednokrotnie. Kładąc mianowicie $x_0 = t$, $f(x) = y_0 + (x - t)g(x)^{-1}$ i $y = y_0 + e$, ostatni wzór przekształcamy równoważnie we wzór Bürmanna-Lagrange'a

$$F(f^{-1}(y)) = F(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{x - x_0}{f(x) - y_0}\right)^n F^{(1)}(x)\right]^{(n-1)}_{x=x_0} (y - y_0)^n.$$

W szczególności, dla $F(x) \equiv x$ otrzymujemy następujące wyrażenie na szereg odwrotny

$$f^{-1}(y) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{x - x_0}{f(x) - y_0}\right)^n\right]^{(n-1)}_{x=x_0} (y - y_0)^n.$$

Wzór Bürmanna-Lagrange'a powszechnie traktowany jest jako najlepsze rozwiązanie problemu odwrotnej analitycznej zamiany zmiennej. Jeżeli porównać go z bezpośrednią procedurą odwracania szeregu metodą współczynników nieoznaczonych, to jego prostota jest wprost uderzająca. Kiedy jednak przychodzi do konkretnych obliczeń, natychmiast ujawnia się jego słabość. Prostota tej formuły jest optycznym złudzeniem wywołanym niewłaściwym użyciem symbolu $[\cdots]_{x=x_0}$. Mianowicie, w wyniku różniczkowania dostajemy wyrażenia nieokreślone w x_0, w które nie można po prostu wstawić wartości $x = x_0$, ale należy dokonać dodatkowego przejścia granicznego. Zobaczmy to na przykładzie $n = 2$.

$$\left[\left(\frac{x - x_0}{f(x) - y_0}\right)^2 F^{(1)}(x)\right]^{(1)} =$$

$$= 2\left[\frac{x - x_0}{f(x) - y_0}\right] \cdot \left[\frac{f(x) - y_0 - (x - x_0) f^{(1)}(x)}{(f(x) - y_0)^2}\right] \cdot F^{(1)}(x)$$

$$+\left[\frac{x-x_0}{f(x)-y_0}\right]^2\cdot F^{(2)}(x).$$

Jak bardzo myląca jest notacja $[\cdots]_{x=x_0}$, sugerująca podstawienie wartości $x = x_0$, pokazują następujące obliczenia, w których dokonujemy przejścia granicznego korzystając z rozwinięcia Taylora

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + o(|x-x_0|^2), \tag{11}$$

$$f^{(1)}(x) = f^{(1)}(x_0) + f^{(2)}(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|), \tag{12}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-y_0-(x-x_0)f^{(1)}(x)}{(f(x)-y_0)^2} = -\frac{1}{2}\frac{f^{(2)}(x_0)}{f^{(1)}(x_0)^2}, \tag{13}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-y_0-(x-x_0)f^{(1)}(x_0)}{(f(x)-y_0)^2} = +\frac{1}{2}\frac{f^{(2)}(x_0)}{f^{(1)}(x_0)^2}. \tag{14}$$

Pokazuje to, że podstawienia $x = x_0$ wręcz nie wolno tu w żadnym miejscu stosować. Widać ponadto z (13), że w wyniku tych dodatkowych przejść granicznych pojawiają się pochodne funkcji f rzędów wyższych, niż sugeruje to zapis formuły. W miarę wzrostu n wyrażenia nieokreślone w x_0 są coraz bardziej skomplikowane i choć dla każdego konkretnego n przejścia granicznego możemy dokonać, korzystając z rozwinięcia Taylora $f(x)$ wokół x_0 jak wyżej, to metoda ta nie daje żadnego wyobrażenia o ogólnej postaci tak otrzymanych współczynników.

Tak więc, rozwiązanie Lagrange'a problemu odwrotnej analitycznej zamiany zmiennej polega, w istocie, na sprowadzeniu go do problemu dzielenia funkcji analitycznych, a mianowicie znalezienia szeregu potęgowego (lub równoważnie - ciągu pochodnych w x_0) funkcji $g(x) = \frac{x-x_0}{f(x)-y_0}$ analitycznej wokół x_0.

Jednak dzielenie to jest nietrywialnym problemem samym w sobie. Nawiasem mówiąc, został on rozwiązany właśnie przez Wrońskiego w roku 1811 i rozwiązanie to podajemy w ostatnim paragrafie niniejszego artykułu. Bez wzorów na dzielenie natomiast, dysponując jedynie operacją pochodnej, dostajemy

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x-x_0}{f(x)-y_0},\\
g^{(1)}(x) &= \frac{f(x)-y_0-(x-x_0)f^{(1)}(x)}{(f(x)-y_0)^2},\\
g^{(2)}(x) &= \frac{-2f^{(1)}(x)(f(x)-y_0-(x-x_0)f^{(1)}(x))-(f(x)-y_0)(x-x_0)f^{(2)}(x)}{(f(x)-y_0)^3},\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

I chociaż rozwijanie w szereg Taylora umożliwia obliczenie tych pochodnych w x_0 dla każdego ustalonego n

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \frac{1}{f^{(1)}}(x_0), \\ g^{(1)}(x_0) &= \frac{-\frac{1}{2}f^{(2)}}{f^{(1)2}}(x_0), \\ g^{(2)}(x_0) &= \frac{-\frac{1}{3}f^{(1)}f^{(3)} + \frac{1}{2}f^{(2)2}}{f^{(1)3}}(x_0), \\ &\vdots \end{aligned}$$

to trudno domyśleć się stąd ogólnej formuły wyrażającej je przez pochodne funkcji f w x_0. Można, co prawda, dostrzec tu pojawianie się 1-kocykli na grupie dyfeomorfizmów związanych z jednowymiarową strukturą afiniczną

$$\frac{-2g^{(1)}}{g}(x_0) = \frac{f^{(2)}}{f^{(1)}}(x_0) \tag{15}$$

i rzutową (tak zwana pochodna Schwartza)

$$\frac{-3g^{(2)}}{g}(x_0) = \frac{f^{(1)}f^{(3)} - \frac{3}{2}f^{(2)2}}{f^{(1)2}}(x_0), \tag{16}$$

ale, jak się zdaje, związek ten, wyrażający geometrię wyższych dżetów, nawet dziś nie jest dostatecznie zrozumiany.

Żeby nadać obliczeniom według tego wzoru charakter algebraiczny, należy wpierw przedstawić wyrażenie meromorficzne $g(x) = \frac{x-x_0}{f(x)-y_0}$ jako funkcję analityczną wokół x_0, czyli wrócić do wzoru Lagrange'a (10).

Wtedy rzeczywiście bez większego trudu obliczamy współczynniki szeregu Lagrange'a (10) jako algebraiczne wyrażenia od pochodnych funkcji g i F w punkcie x_0. W celu wypisania tych algebraicznych wyrażeń potrzebujemy współczynników liczbowych zdefiniowanych następująco.

Definicja. Dla każdej liczby naturalnej $m \geqslant 0$ i ciągu $(i_1, i_2, i_3 \ldots)$ liczb całkowitych prawie wszystkich równych zeru, zdefiniujmy liczby $a^{(m)}_{i_1,i_2,i_3,\ldots}$ za pomocą następującej rekurencji: $a^{(m)}_{i_1,i_2,i_3\ldots} = 0$, jeżeli którykolwiek z indeksów $(i_1, i_2, i_3 \ldots)$ jest ujemny lub $i_1 + 2i_2 + 3i_3 \ldots \neq m$, oraz

$$a^{(0)}_{0,0,0,\ldots} = 1, \tag{17}$$

$$a^{(m+1)}_{i_1,i_2,i_3,\ldots} = a^{(m)}_{i_1-1,i_2,i_3,\ldots} + \sum_{k\geqslant 1}(i_k+1)a^{(m)}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k+1,i_{k+1}-1,i_{k+2},\ldots}. \tag{18}$$

Z definicji tej natychmiast wynika, że $a^{(m)}_{m,0,0,\ldots} = 1$ dla każdego m. Oto pięć następnych grup niezerowych wyrazów tej rekurencji

$$a^{(1)}_{1,\ldots}=1,\quad \begin{array}{l} a^{(2)}_{2,0,\ldots}=1,\\ a^{(2)}_{0,1,\ldots}=1,\end{array}\quad \begin{array}{l} a^{(3)}_{3,0,0,\ldots}=1,\\ a^{(3)}_{1,1,0,\ldots}=3,\\ a^{(3)}_{0,0,1,\ldots}=1,\end{array}\quad \begin{array}{l} a^{(4)}_{4,0,0,0,\ldots}=1,\\ a^{(4)}_{2,1,0,0,\ldots}=6,\\ a^{(4)}_{0,2,0,0,\ldots}=3,\\ a^{(4)}_{1,0,1,0,\ldots}=4,\\ a^{(4)}_{0,0,0,1,\ldots}=1,\end{array}\quad \begin{array}{lcr} a^{(5)}_{5,0,0,0,0,\ldots}&=&1,\\ a^{(5)}_{3,1,0,0,0,\ldots}&=&10,\\ a^{(5)}_{1,2,0,0,0,\ldots}&=&15,\\ a^{(5)}_{2,0,1,0,0,\ldots}&=&10,\\ a^{(5)}_{0,1,1,0,0,\ldots}&=&10,\\ a^{(5)}_{1,0,0,1,0,\ldots}&=&5,\\ a^{(5)}_{0,0,0,0,1,\ldots}&=&1.\end{array}$$

Rekurencja ta ma następujące rozwiązanie w zwartej postaci, podane przez Faà di Bruno (1825-1888),

$$a^{(m)}_{i_1,i_2,i_3\ldots}=\frac{m!}{i_1!i_2!i_3!\ldots 1!^{i_1}2!^{i_2}3!^{i_3}\ldots}. \tag{19}$$

Jeżeli traktować wzory (17)-(18) jako analog trójkąta Pascala obliczającego współczynniki dwumianowe $\left(\begin{array}{c} m\\ i\end{array}\right)$, to wzór (19) należy traktować jako analog wzoru

$$\left(\begin{array}{c} m\\ i\end{array}\right)=\frac{m!}{i!(m-i)!}. \tag{20}$$

Łatwo zobaczyć, korzystając z (17)-(18), że liczby te występują jako liczbowe współczynniki w regule łańcuchowej obliczania wyższych pochodnych funkcji złożonej (podanej przez Faà di Bruno)

$$(h\circ g)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}\left(h^{(k)}\circ g\right)\cdot\sum_{\substack{i_1+2i_2+3i_3+\ldots=m,\\ i_1+i_2+i_3+\ldots=k}} a^{(m)}_{i_1,i_2,i_3,\ldots}\prod_{r\geqslant 1} g^{(r)i_r}, \tag{21}$$

w której dla $i_r=0$ przyjmujemy $g^{(r)i_r}:=1$ i sumowanie ograniczone jest do indeksów $i_r\geqslant 0$.

Stosując iterowaną regułę Leibniza oraz wzór (21) do $h(z):=\frac{z^n}{n!}$ w formule (10) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\left[g^nF^{(1)}\right]^{(n-1)}&=\\ &=\sum_{m=0}^{n-1}\left(\begin{array}{c} n-1\\ m\end{array}\right)\sum_{k=0}^{m}\frac{g^{n-k}}{(n-k)!}\sum_{\substack{i_1+2i_2+3i_3+\ldots=m,\\ i_1+i_2+i_3+\ldots=k}} a^{(m)}_{i_1,i_2,i_3,\ldots}\prod_{r\geqslant 1} g^{(r)i_r}\cdot F^{(n-m)}.\end{aligned} \tag{22}$$

Podstawienie wartości $x=x_0$ (na przykład wyniku obserwacji astronomicznej) jest teraz w pełni uprawnione i właśnie dlatego rozwiązanie Lagrange'a równania Keplera ma tak wielkie znaczenie dla obliczeń astronomicznych.

Jeżeli z kolei zastosować iterowaną regułę Leibniza oraz wzór (21) do kompozycji $H\circ G$, gdzie $H(z):=\frac{z^{-n}}{n!}$ oraz

(23)

$$G(x)=\frac{f(x)-y_0}{x-x_0}=f^{(1)}(x_0)+\frac{1}{2}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{6}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^2+\cdots,$$

w formule (11), otrzymujemy

(24)

$$F(f^{-1}(y)) = F(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \sum_{k=0}^{m} \binom{k+n-1}{k} \widetilde{\gamma}_{m,k} \cdot F^{(n-m)} \right] (x_0) \left(\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)} \right)^n ,$$

gdzie

$$\widetilde{\gamma}_{m,k} = (-1)^k k! \sum_{\substack{i_1+2i_2+3i_3+\ldots=m, \\ i_1+i_2+i_3+\ldots=k}} a^{(m)}_{i_1,i_2,i_3,\ldots} \prod_{r\geqslant 1} \left(\frac{\gamma_r}{r+1} \right)^{i_r} , \tag{25}$$

$$\gamma_r := \frac{f^{(r+1)}}{f^{(1)}}. \tag{26}$$

Wielkości (26) mają następujący sens geometryczny: są to współczynniki wyższych rzędów koneksji afinicznej, będącej cofnięciem struktury afinicznej na prostej za pomocą f^{-1}. Jeżeli $v(x)\frac{d}{dx}$ jest polem wektorowym stycznym na prostej, to jego wyższe pochodne kowariantne mają postać

$$\frac{D^n}{dx^n}(v(x)\frac{d}{dx}) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \gamma_m(x) \cdot v^{(n-m)}(x) \frac{d}{dx}. \tag{27}$$

Wielkość $\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)}$, względem potęg której rozwijamy, również ma interpretację geometryczną: $\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)} \frac{d}{dx}$ jest wektorem stycznym w punkcie x_0, który jest przekształcany przy dyfeomorfizmie f w wektor wodzący $(y-y_0)\frac{d}{dy}$ punktu y zaczepiony w punkcie y_0. Pojęcie wektora wodzącego ma sens po ustaleniu struktury afinicznej na prostej. Dlatego wzór (24) należy dziś rozumieć następująco:

Lokalny dyfeomorfizm f^{-1} cofa przesunięcie o wektor swobodny na prostej do przesunięcia równoległego w sensie koneksji afinicznej. Koneksja ta przedłuża się do afinicznej wiązki dżetow funkcji i wzór (24) opisuje właśnie to przedłużenie.

Przy obliczaniu kolejnych członów rozwinięcia łatwo zauważyć intrygujące zjawisko polegające na tym, że wszystkie współczynniki liczbowe oprócz współczynników Faà di Bruno, występujące w tej formule w nawiasie kwadratowym, upraszczają się. W następnym paragrafie okaże się, że formułę tę można wygenerować inaczej, otrzymując ją od razu w postaci prostej i eleganckiej, oczyszczonej z tych niepotrzebnych współczynników.

Podsumowując, „formuła” Bürmanna-Lagrange'a w postaci (11) jest niczym więcej jak sugestywnie zapisanym rekurencyjnym algorytmem o dość wysokiej złożoności. Rekurencja ta nie jest rozwiązana przez podanie algebraicznej formuły w zwartej postaci wyrażającej współczynniki rozwinięcia kompozycji $F \circ f^{-1}$ za pomocą współczynników rozwinięć funkcji F i f. Natomiast po przekształceniu do algebraicznej postaci (24), za pomocą formuły Faà di Bruno, zawiera liczne zbędne artefakty, które, i tak w końcu się skracając, tylko zawadzają w obliczeniach.

3.2. **Rozwiązanie Wrońskiego problemu odwrotnej analitycznej zamiany zmiennej** [18]. Wroński rozważa rozwinięcie postaci

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n F_n(x),$$

gdzie

$$F_n(x) = \frac{1}{n!}(f(x) - y_0)^n, \quad f(x_0) = y_0.$$

Wzór Bürmanna-Lagrange'a, przynajmniej na poziomie formalnym, jest wówczas banalną konsekwencją łatwego do sprawdzenia faktu, że funkcjonały liniowe L_n, gdzie

$$L_n(F) := \left[\left(\frac{x - x_0}{f(x) - y_0}\right)^n F^{(1)}(x)\right]^{(n-1)}_{x=x_0}, \tag{28}$$

spełniają

$$L_m(F_n) = \delta_{m,n}, \tag{29}$$

czyli są bardzo szczególnymi „funkcjami algorytmicznymi" w sensie Wrońskiego. Jest to jednak, jak już wiemy, rozwiązanie połowiczne. Aby efektywnie obliczyć współczynniki c_n, Wroński korzysta ze swojej ogólnej metody, otrzymując

$$c_n = \frac{\begin{vmatrix} F_1^{(1)} & \cdots & F_{n-1}^{(1)} & F^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_1^{(n)} & \cdots & F_{n-1}^{(n)} & F^{(n)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_1^{(1)} & \cdots & F_{n-1}^{(1)} & F_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_1^{(n)} & \cdots & F_{n-1}^{(n)} & F_n^{(n)} \end{vmatrix}}(x_0). \tag{30}$$

Korzystając z (21) dla $h(z) := \frac{(z-y_0)^n}{n!}$ i $g(x) := f(x)$ oraz tożsamości

$$\left(\frac{d^i}{dz^i}(\frac{1}{k!}(z - y_0)^k)\right)_{z=y_0} = \delta_{i,k}$$

otrzymujemy następujące wyrażenia na pochodne funkcji złożonej F_n w punkcie x_0.

$$F_k^{(m)}(x_0) = \sum_{\substack{i_1+2i_2+3i_3+\ldots=m,\\ i_1+i_2+i_3+\ldots=k}} a^{(m)}_{i_1,i_2,i_3,\ldots} \prod_{r\geqslant 1} f^{(r)i_r}(x_0). \tag{31}$$

W szczególności

$$F_k^{(m)}(x_0) = 0, \quad \text{dla } k > m, \tag{32}$$

$$F_m^{(m)}(x_0) = f^{(1)m}(x_0). \tag{33}$$

Wówczas współczynniki Wrońskiego (30) przyjmują postać

(34)
$$c_n = \frac{\begin{vmatrix} F_1^{(1)} & \cdots & F_{n-1}^{(1)} & F^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_1^{(n)} & \cdots & F_{n-1}^{(n)} & F^{(n)} \end{vmatrix}}{f^{(1)\frac{n(n+1)}{2}}}(x_0),$$

w której w pierwszych $n-1$ kolumnach wyznacznika wstawiamy prawe strony (31). Rozwinięcie to dalej można uprościć używając wielkości (26), jak w przypadku wzoru Bürmanna-Lagrange'a.

(35)
$$F(f^{-1}(y)) = F(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & F^{(1)} \\ \gamma_{2,1} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & F^{(n-2)} \\ \vdots & & \ddots & 1 & F^{(n-1)} \\ \gamma_{n,1} & \cdots & \cdots & \gamma_{n,n-1} & F^{(n)} \end{vmatrix} (x_0) \left(\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)} \right)^n,$$

gdzie

(36)
$$\gamma_{m,k} := \sum_{\substack{i_1+2i_2+3i_3+\ldots=m, \\ i_1+i_2+i_3+\ldots=k}} a^{(m)}_{i_1,i_2,i_3,\ldots} \prod_{r\geqslant 1} \gamma_r^{i_r+1},$$

na przykład

$$\begin{array}{lllllllll} \gamma_{2,1} & = & \gamma_1, & & & & & & \\ \gamma_{3,1} & = & \gamma_2, & \gamma_{3,2} & = & 3\gamma_1, & & & \\ \gamma_{4,1} & = & \gamma_3, & \gamma_{4,2} & = & 3\gamma_1^2+4\gamma_2, & \gamma_{4,3} & = & 6\gamma_1, \\ \gamma_{5,1} & = & \gamma_4, & \gamma_{5,2} & = & 10\gamma_1\gamma_2+5\gamma_3, & \gamma_{5,3} & = & 15\gamma_1^2+10\gamma_2, \quad \gamma_{5,4} = 10\gamma_1, \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \quad\quad \vdots \end{array}$$

skąd

$$F(f^{-1}(y)) = F(x_0) + F^{(1)}(x_0)\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & F^{(1)} \\ \gamma_1 & F^{(2)} \end{vmatrix}(x_0)\left(\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)}\right)^2 + \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & F^{(1)} \\ \gamma_1 & 1 & F^{(2)} \\ \gamma_2 & 3\gamma_1 & F^{(3)} \end{vmatrix}(x_0)\left(\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)}\right)^3$$

$$+\frac{1}{24}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & F^{(1)} \\ \gamma_1 & 1 & 0 & F^{(2)} \\ \gamma_2 & 3\gamma_1 & 1 & F^{(3)} \\ \gamma_3 & 3\gamma_1^2+4\gamma_2 & 6\gamma_1 & F^{(4)} \end{vmatrix}(x_0)\left(\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)}\right)^4$$

$$+\frac{1}{120}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & F^{(1)} \\ \gamma_1 & 1 & 0 & 0 & F^{(2)} \\ \gamma_2 & 3\gamma_1 & 1 & 0 & F^{(3)} \\ \gamma_3 & 3\gamma_1^2+4\gamma_2 & 6\gamma_1 & 1 & F^{(4)} \\ \gamma_4 & 10\gamma_1\gamma_2+5\gamma_3 & 15\gamma_1^2+10\gamma_2 & 10\gamma_1 & F^{(5)} \end{vmatrix}(x_0)\left(\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)}\right)^5 + \cdots$$

W szczególności dla $F(x) \equiv x$ otrzymujemy wzór na szereg odwrotny

$$f^{-1}(y) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \begin{vmatrix} \gamma_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ \gamma_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \gamma_{n,n-1} \end{vmatrix} (x_0) \left(\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)} \right)^n,$$

czyli

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= x_0 + \frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)} - \frac{1}{2}\gamma_1(x_0) \left(\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \gamma_1 & 1 \\ \gamma_2 & 3\gamma_1 \end{vmatrix} (x_0) \left(\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)} \right)^3 - \frac{1}{24} \begin{vmatrix} \gamma_1 & 1 & 0 \\ \gamma_2 & 3\gamma_1 & 1 \\ \gamma_3 & 3\gamma_1^2 + 4\gamma_2 & 6\gamma_1 \end{vmatrix} (x_0) \left(\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)} \right)^4 \\ &+ \frac{1}{120} \begin{vmatrix} \gamma_1 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 3\gamma_1 & 1 & 0 \\ \gamma_3 & 3\gamma_1^2 + 4\gamma_2 & 6\gamma_1 & 1 \\ \gamma_4 & 10\gamma_1\gamma_2 + 5\gamma_3 & 15\gamma_1^2 + 10\gamma_2 & 10\gamma_1 \end{vmatrix} (x_0) \left(\frac{y-y_0}{f^{(1)}(x_0)} \right)^5 + \cdots \end{aligned}$$

Na uwagę zasługuje fakt, że wzory te, będące odpowiednikami formuł Bürmanna-Lagrange'a, wolne są od omówionych wyżej wad tych ostatnich. W tej postaci wzory Wrońskiego od razu podają jawną zależność współczynników szeregu szukanego $F \circ f^{-1}$ od współczynników szeregów danych F i f.

3.3. **Rozwiązanie Wrońskiego problemu dzielenia funkcji analitycznych.** Ponieważ mnożenie szeregów potęgowych opisane jest prostą regułą Cauchy'ego, kluczowym momentem w dzieleniu szeregów potęgowych jest obliczenie odwrotności dzielnika. Można założyć, że dzielnik nie znika w punkcie x_0, i że $x_0 = 0$.

W 1811 r. [17] Wroński otrzymał rozwinięcie

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots} = s_0 + s_1 x + \cdots + s_n x^n + \cdots, \tag{37}$$

$$s_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

(W [35] wzór ten cytowany jest z błędnym znakiem $(-1)^{n+1}$.)

3.3.1. *Zera funkcji analitycznych.* W 1868 r. de Morgan zastosował rozwinięcie Wrońskiego (37) do wyprowadzenia następującego asymptotycznego wyrażenia na miejsce zerowe funkcji analitycznej $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ [40]. Jeżeli szereg ten ma dokładnie jedno miejsce zerowe x_1 o minimalnej wartości bezwzględnej i w pewnym kole o środku $x_0 = 0$ zawierającym x_1 szereg ten jest zbieżny, to

$$x_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{s_{n-1}}{s_n}.$$

Literatura

[1] Abramowitz, M.; Stegun, I. A. (Eds.): *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing.* New York: Dover, 1972.

[2] Banach, S.: *Über das ≪Loi suprème≫ von J. Hoene-Wroński.* Bull. intern. Acad. pol. sci. et lett. Ser. A, 1939, No 1-3A.

[3] Cauchy, A. L.: *Mémoire sur divers points d'analyse.* Mém. Acad. France, 8 (1829), pp. 101-129.

[4] Cauchy, A. L.: *Mémoire sur le développement de $f(\xi)$ suivant h, ξ étant une racine de l'équation $z - x - h\omega(z) = 0$.* Mém. Acad. France, 8 (1829), pp. 130-138.

[5] Cauchy, A. L.: *Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence.* Exercises d'analyse et de physique mathématique, Paris, 1 (1840), pp. 279-287.

[6] Cauchy, A. L.: *Resumé d'un mémoire sur la mécanique celéste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites.* Exercises d'analyse et de physique mathématique, Paris, 2 (1841), pp. 79-81.

[7] Cauchy, A. L.: *Rapport sur un mémoire qui a étè presenté à l'Académie par M. Felix Chio et qui a pour titre ≪Recherches sur la série de Lagrange≫.* C. R. Acad. Sci. Paris, 23 (1846), pp. 490-501.

[8] Cauchy, A. L.: *Rapport sur nouvelles recherches relatives à la série de Lagrange et presentées à l'Academie par M. Felix Chio de Turin.* C. R. Acad. Sci. Paris, 34 (1852), I sér. Rapport, pp. 304-309; Note I, pp. 309-315, Note II, pp. 316-319, Note III, pp. 345-349.

[9] Cayley, A.: *On Wronski's theorem.* Quarterly Journal of pure and applied math., 47 (1873)

[10] Comtet, L.: *Advanced combinatorics. The art of finite and infinite expansions. Revised and enlarged edition.* D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974.

[11] Čebyšev, I. L.: *O râde Lagranža.* (1857), Poln. sobr. soč. M., Izd.-vo AN SSSR, t. 2 (1947), s. 127-145.

[12] Dickstein, S.: *O ≪prawie najwyższem≫ Hoene-Wrońskiego.* Prace mat.-fiz., 1890, t. II, s. 145-168.

[13] Dickstein, S.: *O ≪prawie najwyższem≫ Hoene-Wrońskiego.* Prace mat.-fiz., 1894, t. V, s. 123-145.

[14] Euler, L.: *Observationes circa radices aequationum.* Novi comment. Acad. Petropol., 15 (1770), pp. 51-74.

[15] Goursat, E.: *A Course in Mathematical Analysis, Vol. 2: Functions of a Complex Variable & Differential Equations.* New York: Dover, 1959.

[16] Hazewinkel, M.; (Ed.) *Encyclopaedia of Mathematics.* 2002 Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 2002.

[17] Hoene-Wroński, J. M.: *Introduction à la Philosophie des Mathématiques et Technie de l'Algorithmique.* Courcier, Paris, 1811.

[18] Hoene-Wroński, J. M.: *Refutation de la theorie des functions analytiques de Lagrange.* Blankenstein, Paris, 1812.

[19] Hoene-Wroński, J. M.: *Philosophie de la technie algorithmique: Loi Suprème et universelle; Réforme des Mathématiques.* Paris, 1815-1817.

[20] Hoene-Wroński, J. M.: *Critique de la théorie des fonctions génératrices de Laplace.* Paris, 1819.

[21] Hoene-Wroński, J. M.: *The legacy of Hoene-Wroński in the Kórnik Library.* www.bkpan.poznan.pl

[22] Jacobi, C.-G.: *De resolutione aequationum per series infinitas.* J. reine und angew. Math., 6 (1830), pp. 257-286; Gesammelte Werke, Bd. 7 (1891), S. 11-19, 24-25.

[23] Lagrange, J. L.: *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen de séries.* Mém. Acad. sci. Berlin, 1770, t. 24; Oeuvres. Paris, 1869, t. 3. p. 5-73.

[24] Lagrange, J. L.: *Sur le problème de Kepler.* Mém. Acad. sci. Berlin, 1771, t. 25; Oeuvres. Paris, 1869, t. 3. p. 111-138.

[25] Lagrange, J. L.: *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables.* Nouveaux Mém. Acad. sci. Berlin Année 1772; Oeuvres. Paris, 1869, t. 3. p. 439-476.
[26] Lagrange, J. L.: *Mécanique analytique.* Courcier, Paris, 1811.
[27] Lambert, J. H.: *Observations analytiques.* Mém. Acad. Berlin, 1770, pp. 225-244.
[28] Laplace, P. S.: *Mémoire sur l'usage du calcul aux différences partielles dans la théorie des suites.* Mém. Acad. France, 1777, pp. 99-122.
[29] Laplace, P. S.: *Traité de mecanique célèste.* Paris, 1799, t.1, pp. 170-189.
[30] Laplace, P. S.: *Mémoir sur le développement de l'anomalie vraie et un rayon vecteur elliptique en séries ordonnées suivant les puissances de l'excetricité.* Mém. Acad. France, 6 (1823), pp. 61-80.
[31] Laurent, H.: *Traité d'analyse.* Paris, 1888.
[32] Lexell, A. J.: *Demonstratio theorematis analyticae celeberrimo La Grange inventi.* Novi comment. Acad. Petropol., 16 (1771), pp. 230-254.
[33] Mansion, P.: *Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand.* Paris, 1887.
[34] Nekrasov, P. A.: *Rây Lagranža i približennye vyraženiâ funkcij ves'ma bol'šyh čisel.* Mat. sb. M., 1885,vyp. 1, s. 49-188; vyp. 2, s. 315-376; vyp. 3, s. 481-579; vyp. 4, s. 643-725.
[35] Petrova, S. S.; Romanovska, D. A.: *Ob universalnom râde Gëne-Vronskogo.* Istoriko-matematičeskie issledovaniâ. Vyp. 24, Moskva 1979, pp. 158-175.
[36] Phili, C.: *La loi suprème de Hoëné-Wroński: la rencontre de la philosophie et des mathématiques.* Paradigms and mathematics, 289-308, Ciencia, Siglo XXI Espańa Ed., Madrid, 1996.
[37] Rutishauser, H.: *Eine Formel von Wronski und ihre Bedeutung für den Quotienten-Differenzen- Algorithmus.* Z. Angew. Math. Phys. 7 (1956), 164-169.
[38] Sohockij, Û. V.: *Teoriâ integral'nyh vyčetov s nekotorymi priloženiâmi.* SPb, 1868, s. 44-50.
[39] Stiltjes, T.: *Généralisation de la série de Lagrange.* Ann. Ecole norm. Paris, 2 (1885).
[40] Whittaker, E. T.; Robinson, G.: *The calculus of observations.* London, 1924, pp. 120-122.
[41] Whittaker, E. T.; Watson, G. N.: *"Lagrange's Theorem." §7.32 in A Course in Modern Analysis, 4th ed.* Cambridge, England: Cambridge University Press, 1990.
[42] Zolotarev, E. I.: *O râde Lagranža.* (1876), Poln. soč. vyp. 1. L., Izd.-vo AN SSSR, 1931, s. 159-160.
[43] Żorawski, K.: *O szeregach odwracających.* Prace mat.-fiz., t. V (1894), 56-68.
[44] Żurakowski, S.: *Dowód twierdzenia H. Wrońskiego.* Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie, t. XIV (1888), 56-68.

Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Sniadeckich 8
00–956 Warszawa, Poland,
Institute of Mathematics, University of Warsaw, Banacha 2
02–097 Warszawa, Poland
E-mail address: maszczyk@mimuw.edu.pl